マッチングからマトロイドパリティへ

From Matching to Matroid Parity

小林佑輔

Abstract

グラフのマッチングは，研修医の病院への割当て，学生の学校への割当て，仕事の労働者への割当てなどのモデル化を動機として，様々な分野において盛んに研究されている．本稿では，アルゴリズムに興味を持つ読者を対象とし，所望のマッチングを効率良く求めるアルゴリズムの理論について，計算機科学の視点から紹介する．まず，マッチングの概念を説明し，マッチングアルゴリズムに関する古典的な結果について述べる．そして，マトロイドパリティと呼ばれるマッチングを一般化した概念について筆者らの最新の結果とともに紹介する．

キーワード：マッチング，グラフアルゴリズム，多項式時間アルゴリズム，マトロイドパリティ

1．は じ め に

4人の男性 A，B，C，D と4人の女性 W，X，Y，Z がいるときに，この8人を四つの男女ペアに分けることを考える．ただし，ペアになることのできる男女の組には制限があり，例えば A と W はペアになることができるが，A と Y はペアになることができない，といった具合である．それぞれの人を点で表し，互いにペアになることができる人を線分で結ぶことで，ペアになることのできる組合せを図1のように表現することにする．この場合は，8人を例えば (A, X)，(B, Z)，(C, W)，(D, Y) というペアに分けられることが分かる．なお，図1のように点とそのつながり方を表現する構造はグラフと呼ばれる．

本稿ではグラフを頂点集合 V と辺集合 E との組 $G=(V, E)$ で表す．特に，今回の場合には各頂点に対応する人は男性と女性の2種類に分けられており，男女をペアにする状況を考えていた．そのため，扱うグラフは頂点集合が V が2種類の集合 V_1，V_2 に分割されており，各辺は V_1 の頂点と V_2 の頂点をつないでいる．このようなグラフを2部グラフと呼び，$G=(V_1, V_2; E)$ と表す．ペア分けはグラフにおいてはマッチングと呼ばれる概念に相当する．辺の集合 $M \subseteq E$ がマッチングであるとは，どの頂点に対してもその点に接続する M の辺が高々1本であることを言う．また，特にどの頂点に対してもその点に接続する M の辺がちょうど1本であるときに，M は完全マッチングであると言う．すると，男女ペアに分ける問題は，2部グラフ $G=(V_1, V_2; E)$ が与えられたときに，完全マッチング $M \subseteq E$ を求める問題として記述することができる．

2部グラフにおけるマッチングは，人同士のペア分け以外にも様々な場面に現れる．例えば，研修医を病院に割り当てる問題，学生を研究室に割り当てる問題，仕事を労働者に割り当てる問題などである．なお，一つの病

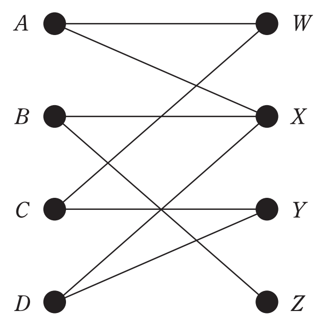


図1　ペアになることのできる組合せをグラフとして図示したもの　各点が人に対応し，2点間が結ばれている場合にペアを組むことができる．

小林佑輔　筑波大学システム情報系社会工学域
E-mail　kobayashi@sk.tsukuba.ac.jp
Yusuke KOBAYASHI, Nonmember (Division of Policy and Planning Sciences, University of Tsukuba, Tsukuba-shi, 305-8573 Japan).
電子情報通信学会誌　Vol.101 No.3 pp.248-252 2018年3月

院や研究室に複数人が割り当てられることを許す問題設定も，簡単な帰着により本質的にはマッチングと同様に扱うことができる．マッチングは数学的に抽象化された概念であるため，様々な対象を統一的に扱うことができる．マッチングに関しては，計算機科学のみならず離散数学やゲーム理論などの分野においても様々な研究が行われている．本稿では，所望のマッチングを求める問題及びその拡張に対するアルゴリズムの理論について，計算機科学の視点から紹介する．

2. 2部グラフのマッチング

2.1 最大マッチングアルゴリズム

冒頭の例では人数が少なかったために，手作業で男女のペア分けをするのはそれほど難しくなかった．しかし，人数が100人や1,000人いる場合にはどのようにペア分けしたらよいだろうか．すなわち，大きな2部グラフが与えられたときに，完全マッチングを求める，若しくは最大サイズのマッチングを求めるにはどのようにしたらよいだろうか．この問題に対しては様々な効率的アルゴリズムが提案されており，一般的な計算機を用いると，ある程度大きなグラフにおいても実用的な時間でマッチング問題を解くことができる．

2部グラフの最大サイズのマッチングを求めるアルゴリズムの基本的なアイデアについて簡単に紹介する．Mを最大サイズとは限らないマッチングとする．図2のように，Mに含まれる辺とMに含まれない点を交互に通る道Pであって，Pの両端点に接続するMの辺がないものを，M-増加道と呼ぶ．ただし，道とは同じ頂点を二度以上通らないように辺を順にたどったものである．M-増加道Pが存在するときには，Mから$M\cap P$の辺を取り除き，$P\backslash M$の辺を加えることによって新たな辺集合M'を得ることができる（図3）．ただし，$P\backslash M$はPとMの差集合，すなわちPに含まれていてMに含まれない辺の集合を表す．M-増加道の定義から，こうして得られたM'はMよりもサイズが1大きいマッチングとなっていることが確認できる．

更に，Mが最大サイズのマッチングでないときには，必ずM-増加道が存在することを示すことができる．そのため，適当なマッチングM（例えば$M=\emptyset$）から始めて，M-増加道を見つけてマッチングの更新を繰り返すことにより，最大サイズのマッチングを得ることができる．M-増加道を見つけるのは高々辺の本数$|E|$に比例する計算時間で行え，マッチングの更新回数は高々頂点数$|V|$で抑えられるため，このアルゴリズムの計算時間は高々$|V||E|$に比例する程度で抑えることができる．

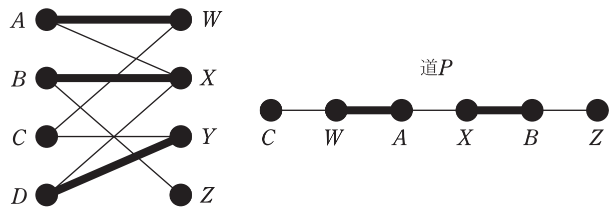


図2　M-増加道の例　　左図において太線は最大ではないマッチングMを表す．右図の道PはM-増加道の一つとなっている．

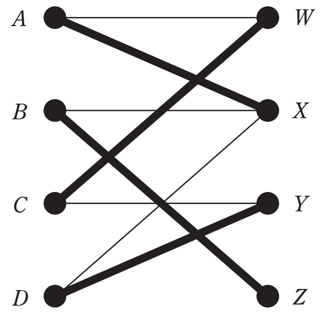


図3　M-増加道による更新結果　　図2のマッチングMをM-増加道Pに沿って更新して得られる新しいマッチングM'を太線で示している．M'のサイズはMよりも1大きくなっていることが確認できる．

アルゴリズムの詳細やより高速なアルゴリズムについては，文献(1)，(2)などの組合せ最適化の教科書を参照されたい．なお，このマッチングアルゴリズムのように，計算時間が入力サイズの多項式で抑えられるアルゴリズムは多項式時間アルゴリズムと呼ばれ，アルゴリズムの理論研究においては効率的なアルゴリズムとみなすことが多い．

2.2 最大重みマッチング問題

2.1ではマッチングのサイズを最大化する問題を扱ってきたが，各辺に重みが与えられたグラフにおけるマッチング問題を考えることもできる．例えば，仕事の労働者への割当てをマッチングで表し，辺の重みが労働者が仕事を行うことで得られる利得を表すとすると，合計重みを最大化するマッチングを求めることは，利得を最大化する仕事の割当てを決めることに対応する．より正確には，2部グラフ$G=(V_1, V_2; E)$と各辺$e\in E$の非負の重み$w(e)$が入力として与えられたときに，合計重み$\sum_{e\in M} w(e)$が最大となるG上のマッチングMを求める

用　語　解　説

マトロイド　　ベクトルの一次独立性を抽象化した概念．マトロイド上の様々な問題が効率的に解けることから，離散最適化における重要な概念として認識されている．

マトロイド交差　　二つのマトロイドが入力として与えられたときに，どちらのマトロイドにおいても独立となる最大サイズの集合を求める問題．

問題である．この問題を最大重みマッチング問題という．また，別の自然な重み付の問題として，合計重みが最小となる完全マッチングを求める問題も考えることができる．この問題は，最小重み完全マッチング問題や割当問題と呼ばれ，本質的には最大重みマッチング問題と等価であることが知られている．

最大重みマッチング問題や最小重み完全マッチング問題に対しても，効率的なアルゴリズムの存在が 1950 年代から知られている．重み付の問題を解く際には，得られたマッチングよりも良い解が存在しないこと，すなわち出力解の最適性を保証するのが難しいポイントである．最適性を保証する際には，マッチングの双対概念に当たる頂点上の関数を用いた議論をすることが多い．

3. 一般グラフのマッチング

これまで 2 部グラフにおける最大マッチング問題について紹介してきたが，マッチングは 2 部グラフではない一般のグラフにおいても考えることができる．実際，頂点集合が V，辺集合が E である一般のグラフ $G=(V,E)$ において，最大サイズのマッチング $M\subseteq E$ を求める問題を考えるのは自然であろう．これは，冒頭のペア分けの例で言うと，男女を区別せずにできるだけ多くのペアを作る状況に対応する．図 4 に 2 部グラフでないグラフにおけるマッチングの例を示す．

一般のグラフにおける最大マッチング問題は，グラフを 2 部グラフに限った場合に比べて格段に難しくなる．実際，1960 年代に Edmonds[(3)] によって与えられた最大マッチング問題に対する効率的なアルゴリズムは，組合せ最適化分野の草分けとも言える重要な結果として認識されている．一般のグラフにおける最大マッチング問題も，2 部グラフにおける問題と同様に，M-増加道を見つけてマッチングの更新を繰り返すことにより，最大サイズのマッチングを得ることができる．しかし，2 部グラフにおける問題とは異なり，一般のグラフにおいては M-増加道を発見することが容易ではない．Edmonds のアルゴリズムはグラフ中の「ブロッサム」と呼ばれる構造に注目して，M-増加道を効率的に発見する手法を与えている．

2 部グラフの場合と同様に，一般のグラフにおいても，各辺の重みが与えられたときに合計重みが最大となるマッチングを求める問題（最大マッチング問題）を考えることができる．一般のグラフにおける最大マッチング問題に対しても，Edmonds により効率的なアルゴリズムが 1960 年代に与えられている．アルゴリズムにおいて出力の最適性を保証する際には，単なる頂点上の関数ではなくブロッサムに対応する変数を用いたより巧妙な双対概念を利用することが必要となる．

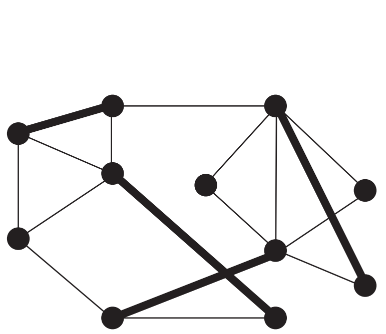


図 4　2 部グラフではないグラフの例　　マッチングの一つを太線で示している．

4. 線形マトロイドパリティ

一般グラフの最大マッチング問題に対しては多項式時間アルゴリズムが存在することを前章で述べた．では，最大マッチング問題をより一般化した問題に対して多項式時間アルゴリズムを与えることはできないだろうか．より一般的な問題に対してアルゴリズムを与えることができれば，アルゴリズムの汎用性が高まり工学上有益である．また，理論研究の視点からも効率的に計算可能な問題の限界を探ることは自然な目標であろう．

しかし，実際には最大マッチングを一般化した問題に対して効率的アルゴリズムを与えるのは容易ではない．例えば，マッチングは 2 人ずつのペアに分ける問題のモデル化であったが，3 人ずつのグループに分ける問題をモデル化すると，得られる問題はたちまち NP-困難と呼ばれる難解な問題のクラスに属し，多項式時間アルゴリズムの設計が絶望的となる．そのため，最大マッチング問題の適切な一般化を導入し多項式時間アルゴリズムを与えることは，組合せ最適化分野で興味深い問題として盛んに研究されてきた．

最大マッチング問題の一般化として注目を集めている問題の一つに 1970 年代に提案されたマトロイド[(用語)]パリティ問題が挙げられる．この問題は，マッチングのみならず組合せ最適化における別の主要な問題であるマトロイド交差[(用語)]問題も包含する枠組みであることから重要な問題として認識されている．なお，マトロイドパリティ問題はマトロイドマッチング問題とも呼ばれることもある．マトロイドパリティ問題に対しては一般には多項式時間アルゴリズムが存在しないことが知られていた一方で，マトロイドを線形マトロイドに制限した場合（線形マトロイドパリティ問題）に対しては，1970 年代に Lovász[(4)] によって多項式時間アルゴリズムが与えられ，その後より効率的なアルゴリズムが開発されている．

本稿では，マトロイドパリティ問題の一般的な定義を与えることは避け，線形マトロイドパリティ問題に限ってどのような問題であるかを説明する．

入力として $2k$ 本のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{2k-1}, \boldsymbol{a}_{2k}$ が与

$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$	$\boldsymbol{a}_6$
1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0

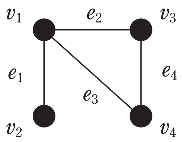
図 5　線形マトロイドパリティ問題の例　$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}, \{\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4\}, \{\boldsymbol{a}_5, \boldsymbol{a}_6\}$ はそれぞれペアで選ぶ必要がある．この場合，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_5, \boldsymbol{a}_6\}$ を選ぶと線形独立な 4 本のベクトルを選ぶことができ，これが最大数となる．

えられ，これらのベクトルは二つのベクトルの対 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}, \{\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4\}, \cdots, \{\boldsymbol{a}_{2k-1}, \boldsymbol{a}_{2k}\}$ に分割されているとする．ここで，各対は線と呼ばれる．このとき，線の和集合として表される線形独立なベクトルの集合のうち最大サイズのものを求める問題が線形マトロイドパリティ問題である．言い換えると，線形マトロイドパリティ問題とは，線形独立なベクトルをできるだけ多く選ぶ問題であり，あるベクトルを選んだ場合には，それと対を成すベクトルも併せて選ぶ必要があるという制約を課した問題である．

例として，図 5 のように三つの線に分割された 6 本の実ベクトルが与えられたとする．このとき，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}, \{\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4\}, \{\boldsymbol{a}_5, \boldsymbol{a}_6\}$ はそれぞれペアで選ぶ必要がある．$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4\}$ や $\{\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5, \boldsymbol{a}_6\}$ は線形独立ではないため選ぶことはできない．この例においては，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_5, \boldsymbol{a}_6\}$ を選ぶと線形独立な 4 本のベクトルを選ぶことができ，これが最大数となる．

一見すると線形マトロイドパリティ問題はマッチングと無関係に見えるが，実は最大マッチング問題は線形マトロイドパリティ問題へ帰着することができる．最大マッチング問題の入力グラフ $G=(V, E)$ が与えられたときに，各線がグラフの辺 $e \in E$ に対応し，各ベクトルの要素が頂点 $v \in V$ に対応する線形マトロイドパリティ問題を以下のように構成する．辺 $e \in E$ が $u, v \in V$ を結ぶとき，「u に対応する成分だけが 1 で残りの成分が全て 0 なベクトル」と「v に対応する成分だけが 1 で残りの成分が全て 0 なベクトル」との対を e に対応する線とする．例えば，図 6 の上図のグラフが与えられたときに，構成される線形マトロイドパリティ問題は図 6 の下図のようになる．

すると，元のグラフで最大マッチングを求めることと，構成された線形マトロイドパリティ問題を解くことは等価である．なぜなら，線形マトロイドパリティ問題で線を選ぶことは，元のグラフで辺を選ぶことに対応しており，線形マトロイドパリティ問題でベクトルの線形独立性を保つことは，元のグラフで同じ端点を共有する辺を選ばない，すなわちマッチングを選ぶことに対応するからである．このように，最大マッチング問題は線形



	e_1		e_2		e_3		e_4	
v_1	1	0	1	0	1	0	0	0
v_2	0	1	0	0	0	0	0	0
v_3	0	0	0	1	0	0	1	0
v_4	0	0	0	0	0	1	0	1

図 6　グラフにおける最大マッチング問題から線形マトロイドパリティ問題への帰着　v_1 と v_2 を結ぶ辺 e_1 に対応する線は，v_1 に対応する要素だけが 1 のベクトルと v_2 に対応する要素だけが 1 のベクトルから成る．

マトロイドパリティ問題へ帰着できる．

5. 重み付線形マトロイドパリティ

線形マトロイドパリティ問題に対しても，各要素に重みの付いた問題を考えることができる．最大マッチング問題やマトロイド交差問題については，各要素に重みの付いた問題に対しても多項式時間アルゴリズムが知られていることから，重み付の線形マトロイドパリティ問題に対しても同様に多項式時間アルゴリズムが存在するのではないかと長い間予想されてきた．しかし，この問題に対しては非常に限られた結果しかこれまでに知られておらず，多項式時間アルゴリズムが存在するか否かは 40 年近くもの間未解決であった．最新の筆者らの論文[5]では，重み付線形マトロイドパリティ問題に対して初の多項式時間アルゴリズムを与えることで，この問題を肯定的に解決した．この研究成果は理論研究において高く評価されており，理論計算機科学の最高峰の会議である ACM Symposium on the Theory of Computing (STOC 2017) において，Best Paper Award を受賞した．論文中では，線形代数的定式化や増加道アルゴリズムといった重みなしの問題に使われていた手法を重み付の問題に適用できる形に発展させるとともに，主双対アルゴリズムや組合せ緩和法といった手法を導入することで，問題の解決に至っている．この成果は多項式時間で解ける問題の限界を推し進めるものであり，様々な組合せ最適化問題に対する多項式時間アルゴリズムの設計につながり得るものである．

6. お わ り に

本稿では，マッチングとその拡張であるマトロイドパリティに関するアルゴリズムの理論について紹介した．

マッチングは古典的で理解しやすい概念でありながら最先端の研究につながっており，組合せ最適化の主要なトピックだと言えるであろう．今後も，マッチングやその拡張を対象として，多項式時間で解ける限界の追究や理論的な計算時間の改善など理論分野での研究は盛んに行われると考えられる．また，本稿ではアルゴリズムの理論的側面についてのみ述べてきたが，マッチングは実問題のモデル化として生じた問題であり，アルゴリズムの実装や実問題への応用も重要な研究対象である．

文　献

（1） B. Korte and J. Vygen, Combinatorial Optimization (Fifth Edition), Springer-Verlag, Berlin, 2012.

（2） A. Schrijver, Combinatorial Optimization : Polyhedra and Efficiency, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

（3） J. Edmonds, "Paths, trees, and flowers," Canadian Journal of Mathematics, vol. 17, pp. 449-467, 1965.

（4） L. Lovász, "The matroid matching problem," Algebraic Methods in Graph Theory, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, vol. 25, pp. 495-517, 1978.

（5） S. Iwata and Y. Kobayashi, "A weighted linear matroid parity algorithm," Proc. 49th ACM Symp. on Theory of Comp., pp. 264-276, Montreal, Canada, June 2017.

（平成 29 年 8 月 29 日受付　平成 29 年 9 月 12 日最終受付）

小林　佑輔（こばやし　ゆうすけ）

平 17 東大・工・計数卒．平 22 同大学院情報理工学系研究科博士課程了．同助教を経て，現在，筑波大・システム情報系・社会工学域・准教授．グラフアルゴリズム，組合せ最適化，離散構造の研究に従事．博士（情報理工学）．2017 STOC Best Paper 受賞．