不規則遷移（カオス）現象の実体安定性について

On the Substantial Stability of Chaotically Transitional Phenomena

上田睆亮

Abstract

語感の響きが功を奏したのか，学術・技術的な定義がきちんと理解されないまま，術語“カオス”は広く一般に流布している．本稿は，出来るだけ専門的な学術語を避け，日常語によって不規則遷移（カオス）現象の解説を試み，さらにこの実在現象と方程式（数式モデル）間の関連が適切か否かの検証を行ったものである．この検証実験結果と，筆者の長年にわたる経験に基づいて，実体安定性の概念を提唱する．この提案はカオス力学系の構造安定性の定義を見直すものである．

キーワード：決定論的方程式，カオス現象，不規則遷移現象，実在現象，実体安定性

1．はじめに

筆者は同期現象の研究に従事し，アナログ計算機実験時の同期が達成されない非周期振動にこだわった．そして，この振動を不規則遷移振動と呼んでいたが，実はカオス現象であった．その間の事情は文献(1)に詳述されている．

非線形振動系に現れる定常現象の一形態としてカオス現象が在る．実状は，本来語義と学術語義の区別がきちんと理解されないまま，語感の魅力の所為か，広く一般に流布し定着しているようだ．

本稿では専門でない方々にカオス現象を直観的に理解して戴くことを意図し，出来るだけ専門的な学術語を用いずに平易な日常語での解説を試みた．とはいえ，常微分方程式と点集合の基礎的な知識は前提とせざるを得なかった．

現象の解説に続いて，実在現象とその解析に用いられる方程式（数式モデル）間に妥当な関連が在るか否かを検証するために行った数値実験結果を基に，実体安定性の概念（修正カオス力学系の構造安定性）を提唱する．

上田睆亮　正員：フェロー　早稲田大学
Yoshisuke UEDA, Fellow (Waseda University, Tokyo, 169-8555 Japan).
電子情報通信学会誌　Vol.98 No.11 pp.948-952 2015年11月

2．不規則遷移（カオス）現象(2)〜(6)

「定常現象」とは，十分時間が経過し，系の振る舞いが落ち着いた状態を言う．決定論的な系，あるいは確定系とは，一例を挙げると次の常微分方程式のように，

$$\dot{x}=y,\ \dot{y}+0.05\,y+x^3=7.5\cos t \qquad (1)$$

その解に不確定さをもたらす要素を全く含まない，初期値を定めれば解がただ一つ定まる，方程式によって表される系のことを言う．従って，このような系には決定論的な定常現象しか現れない，と考えられてきた．しかし，カオス現象はこの決定論的な系に生じることに留意願いたい．

2.1　定常現象と極小集合

方程式(1)の周期 2π の周期解に着目する．この解が漸近安定性を持つとき，この周期解は現実世界に周期振動として現れる．この周期解の（初期時刻 $t=t_0$ における）初期値 (x_0, y_0) は系に過渡状態が生じることなく直ちに定常状態を発生させる (x, y) 平面上の点で，不動点と呼ばれている．なお，$t_0=0$ と置いても一般性は失われない．

周期 2π の定常解以外に，系のパラメータ値にもよるが周期 $2n\pi$ の周期解も在る（n は自然数）．このような定常解を与える（$t=t_0$ における）初期値は (x, y) 平面

上の n 個の点で，それらの各点は n–周期点，これらを纏めた点集合は n–周期群と呼ばれている．

不動点や周期群は極小集合と呼ばれ，定常解を表す初期値集合の最小単位である．極小集合には不動点，周期群以外に概周期解を表す滑らかな単一不変閉曲線が在る．しかし，本稿の説明では，極小集合は不動点あるいは周期群と見做して頂いて差支えない(注1)．

不安定な極小集合は実在する定常状態として観測されない．

2.2 決定論的な現象とカオス現象の相違

確定現象が単一の極小集合によって表されるのに対し，カオス現象は無限個の極小集合を含むカオス・アトラクタと呼ばれる (x, y) 平面上の点集合によって表される．アトラクタは語義のとおり，その点集合の近くの任意の点を初期値とする解を引付ける点集合（後述の解曲線の束の初期値集合）である．カオス・アトラクタを，無限長の数直線 $(-\infty, +\infty)$ を限りなく折りたたんで限られた範囲（領域）内に閉じ込めた点集合（とその閉包，つまり閉集合）に譬えれば，イメージが浮かび易いだろう．そこには数直線上の有理数のようにホモクリニック点が至る所に散在している．

実際，α 枝を延長して追跡すれば自分自身に限りなく漸近しており，カオス・アトラクタは鞍形不動点の α 枝の閉包として与えられる．上記の譬えは，この α 枝を数直線と見做したものだ（例えば図 1）．ホモクリニック点とは，鞍形点の α 枝と ω 枝の交点である．これらのホモクリニック点の近くには周期点（周期は自然数）が無数に存在しており，しかも，これらの周期点は全て不安定（鞍形点）である（ホモクリニック点は周期点の集積点）．つまり，カオス・アトラクタの至る所に周期点が散在している．

また，ω 枝はカオス・アトラクタの引力圏を埋め尽くす，ペアノ曲線と推測される（後述の推移性参照）[6]．

決定論的な微分方程式，たとえば式(1)，から決定論的にカオス・アトラクタが構成される．(t, x, y) 空間の時刻 $t = t_0$ においてカオス・アトラクタ上の点を通る解曲線の束が決定論的に形成され，この束は時間軸に沿って周期 2π でうねっている（式(1)は周期 2π の周期系）．

決定論的な方程式により形成された，カオス・アトラクタおよび解曲線の束が表す動作点の運動について考えよう．現実の系には常に微小な不確定要因が内在，ないし作用している．従って，系の状態を表す動作点は解の束に含まれる一つの解曲線に沿って長時間にわたって運動を続けることは出来ない．しかも，解の束の近くから逸脱することも出来ない．このことは現実の状態を現す動作点がカオス・アトラクタ内の極小集合間を永遠に不規則に遷移，あるいは彷徨し続けることを意味している．このようにして動作点の運動に不規則性が出現する．

筆者はこのような定常状態を「不規則遷移現象」と呼んだ[2]．ここで注意して頂きたいことは，系に作用する微小な不確定要因は，動作点の運動のみならず，系そのものにも僅かな揺らぎを及ぼしていることだ．つまり，カオス・アトラクタそのものも揺らいでおり，これも現象に不規則性をもたらす要因となっている(注2)．

カオス・アトラクタは「初期値鋭敏依存性」，「フラクタル構造」，および「推移性」の三性質を持っている．初期値鋭敏依存性，フラクタル構造はさておいて，推移性は大雑把に，一本の解曲線が解の束の至るところ，かつその幾らでも近くを通る性質と説明されている．この記述は方程式の周期性を基に，解曲線や解の束を一周期分の時間軸上に集約して表すことに依っている．

3. 実在現象と数式モデル間の関連

先ず計算機解の誤差に触れておこう．デジタル計算機を使用する場合は，数値実験に用いる算法および時間軸の刻み幅のみならず計算機内部での実数表現形式（単精度，倍精度，等）によって誤差が混入し，たとえ同じ初期値から求解しても計算機解は微妙に異なった結果を示す．

数値実験のアルゴリズムに意図的な不確定さを導入しない場合のデジタル計算機解では，微小な不確定要因の影響は求解過程，つまり動作点の運動のみに限られ方程

(注1) 極小集合あるいはこれに対応する周期解は，$t = t_0$ のとき，(x, y) 平面上の極小集合の近くにある任意の点を初期値とする解が，$t \to +\infty$ において，この周期解に収束するとき，漸近安定性を持つと定義されている（リヤプノフの意味での安定性）．

単純な不動点および周期点は完全安定点（沈点），完全不安定点（源点），正あるいは逆不安定点（鞍形点）に分類されている．単純とは，後述の構造安定性を持つ，の意味である．なお，正および逆不安定の区別は文献(5)に譲る．

鞍形点は二本（あるいは四本）の枝を持っている．一本（あるいは二本）の枝の上に初期値を持つ解は $t \to +\infty$ で鞍形点に収束する．他の一本（あるいは二本）では $t \to -\infty$ で鞍形点に収束する．前者の枝は ω 枝，後者は α 枝と呼ばれる．いずれの枝上にも無い点を初期値とする解は鞍形点に収束しない．α 枝と ω 枝の和集合は外部構造と呼ばれている．

鞍形点の ω 枝は，下りの尾根道（山稜線あるいは分水嶺）に相当する（離散）軌道である．その終点（最下点）が鞍形点だ．α 枝は鞍形点から両側に流れ出す谷川に相当する軌道である．鞍形点は湧き出しのない源流地点でもある．この譬えは鞍形点の近くにおける，α 枝および ω 枝の直感的なイメージだが，これらは微分方程式の解をストロボ観測（離散力学系）によって追跡した結果を描写・表現する術語である．

(注2) このことは文献(2)に明確に記述されていないが，「系の微小変動」との文言が在ることは執筆当時，潜在的に意識されていたようだ．この文献で扱ったすべての単独方程式は構造安定性を有する，との見方で記述されている．当時，筆者の構造安定性の理解はアンドロノフ・ポントリヤーギンの意味を正確に把握できておらず，安易にアナログ，デジタル両計算機によってほぼ同じ現象が観察されること，だったようだ．

式そのものの変動にまで及ばない（リヤプノフ安定性）．

しかし，アナログ計算機解では，微小な不確定要因は動作点の運動のみならず対象としている方程式そのものにも僅かな揺らぎ（変動）を及ぼすだろう．

このことは，現実の電気・電子回路や機械装置に観察される物理現象は，構成要素・実験条件などが一定に保たれた場合でも，単独の方程式でなく，方程式の集合によって記述されることを意味している．つまり，従来，実現象を表すと考えられてきた単独の方程式は，現象を記述する方程式の集合の代表元であった．この方程式の集合に属す全ての方程式が定性的におなじ振る舞いを現す場合，方程式は構造安定性を持つと定義されている．

この構造安定性の概念はアンドロノフとポントリヤーギンに依って提案され，方程式の定常解が決定論的なアトラクタのみから構成される場合は数学的にも詳細な議論が行われている．

しかし，カオス・アトラクタの現れる系に対しては，如何して方程式の集合を決めるか（先ずは，方程式間の距離の導入），如何して定性的に同じ振る舞いと判断するか，の定義は定かでない．この問題に対し，筆者は定義そのものが厳しすぎて無理があるのではないだろうか，と考えるに至った．この疑念が本稿の試行実験を行う動機となった．

3.1　近隣方程式の導入

物理学をはじめ殆んどすべての自然科学において，実現象が（パラメータの値まで決まっている）単独方程式によって記述される事は当然のこととされている．しかし，一つの物理量は一つの実数に対応するのでなく，数直線上の短い区間によって表される．これと同様に，例えばバネの振動系を記述する場合も，その伸びと復元力の関係，つまり特性曲線は一本描かれているのが常だが，実は，計測される特性曲線はその曲線を含む或る幅を持つ帯状の範囲として与えられる．しかも，数式表現に際しても近似は避けられない．

さらに，多くの簡単な振動系において，系の減衰係数を直接的に計測することは先ず不可能である．これらのことからも実現象の数式表現を行うに際し，構造安定性を検討することの重要さは論を待たないだろう．

本文では以後，式(1)によって表されるカオス現象を実現象と想定し，方程式(1)をその数式モデル（の代表元）と見做すことの是非を数値実験により考究する．以後，式(1)の系をUCAと略記する[(6)]．

そのためにUCAを代表元とする常微分方程式の集合を定めねばならないが，ここでは一般的な議論は行わず，方程式の集合に属す（と考えられる）方程式を次の三個の場合について書き下し，それらの解の大域構造を数値実験的に検討する．以後，書き下ろされた方程式を，UCAの近隣方程式，あるいは，単に近隣式と呼ぶ．

（a）　方程式(1)のパラメータ値を変化させた場合

（b）　方程式(1)のパラメータ値のみならず，復元項 x^3 を x の多項式で置換した場合

（c）　方程式(1)の復元項 x^3 を $x^3+f(x)$ と置き，$f(x)=\pm0.01\exp(x)$(E1, E2)，$f(x)=\pm0.01|x-1|$(PL1, PL2)，$f(x)=0.01\cos 3x$(TC1)，$f(x)=0.01\sin 3x$(TS1)，$f(x)=-0.0097\sin 3x$(TS2)，および $f(x)=-0.01\sin 3x$(TS3) とした場合（式の後は近隣式の記号）[(注3)]

3.2　数値実験結果と考察

前節に導入した近隣式の外部構造，カオス・アトラクタ，およびカオス振動波形を数値実験により検討した．

先ず(a)の場合，近隣式の外部構造やカオス・アトラクタはUCAのそれらと定性的は言うに及ばず定量的にも殆んど変わらなかった．つまりそれらの間の相違が見出し難かった．次に(b)の場合であるが，文献(6)に二例が示されているので，参照して頂きたい．最後の(c)場合，TS3を除く全ての近隣系は，(a)および(b)の場合と殆んど同じ結果を示した．TS3ではカオス・アトラクタは消失し，これは二つの8-周期群によって置換されていた（分岐集合の窓に相当）[(注4)]．

紙面の制約上，結果の幾つかを図1に，近隣系とUCAの差を図2に示しておく．図1左列上図はUCAの α 枝（細線）と ω 枝（太線），つまり外部構造，下図はカオス・アトラクタ（計算機動作点およそ16,000点）と鞍形点の ω 枝である．この系のアトラクタは一個なので，全 (x, y) 平面がその引力圏である．なお，上図の黒丸は正不安定不動点（鞍形点）を，二つの正方形は逆不安定不動点（鞍形点）を示している[(注5)]．図示の二例

(注3)　近隣方程式は微小パラメータを含まず，各方程式はそれぞれが単独の決定論的常微分方程式である．それゆえ，一般にこれらの方程式をUCAの近隣方程式と見なすことはできない．それどころか，パラメータ値まで決まっているので，式(1)とは歴と異なっており，それぞれが方程式の集合を作ると考えられる．しかし，本稿ではこれらの書き下ろされた方程式はUCAが属す集合の元，つまりUCAの近隣方程式と見做している．この辺りが理論の方々に許容して頂き難い問題点である．

(注4)　TS3以外の近隣系においてパラメータ0.01（TS2では0.0097）を ε とおき，ε を0と0.01（0.0097）の間で変化させ，計算機解のあらましを概観したが，全域でカオス・アトラクタが観られた．

(注5)　下図のカオス・アトラクタであるが，点の個数を増やし，そのサイズを小さく描画すれば，カオス・アトラクタがより鮮明になると思われるが，実はかえって見難くなる．上図の α 枝を限りなく延長したものにその極限点を併せた点集合がカオス・アトラクタとなる．図において α 枝と ω 枝は，鞍形点から適当な長さで打ち切られている．これらは線を細く，長く描いても，かえって繋がり具合が見難くなるためである．図からホモクリニック点の構成される模様が推し量られるだろう．

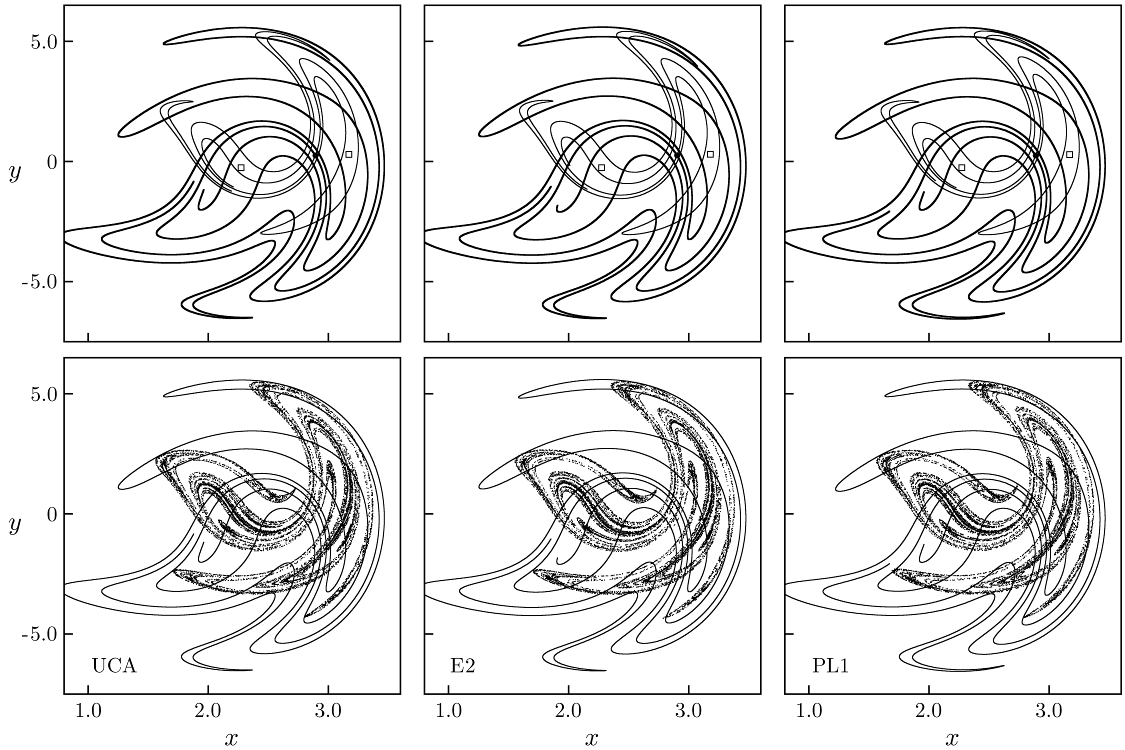

図 1　UCA および近隣系の外部構造とカオス・アトラクタ
左列：$\dot{x}=y,\ \dot{y}+0.05\,y+x^3=7.5\cos t$（UCA）
中列：$\dot{x}=y,\ \dot{y}+0.05\,y+x^3-0.01\exp(x)=7.5\cos t$（E2：クラス D でない）
右列：$\dot{x}=y,\ \dot{y}+0.05\,y+x^3+0.01|x-1|=7.5\cos t$（PL1：導関数は不連続）

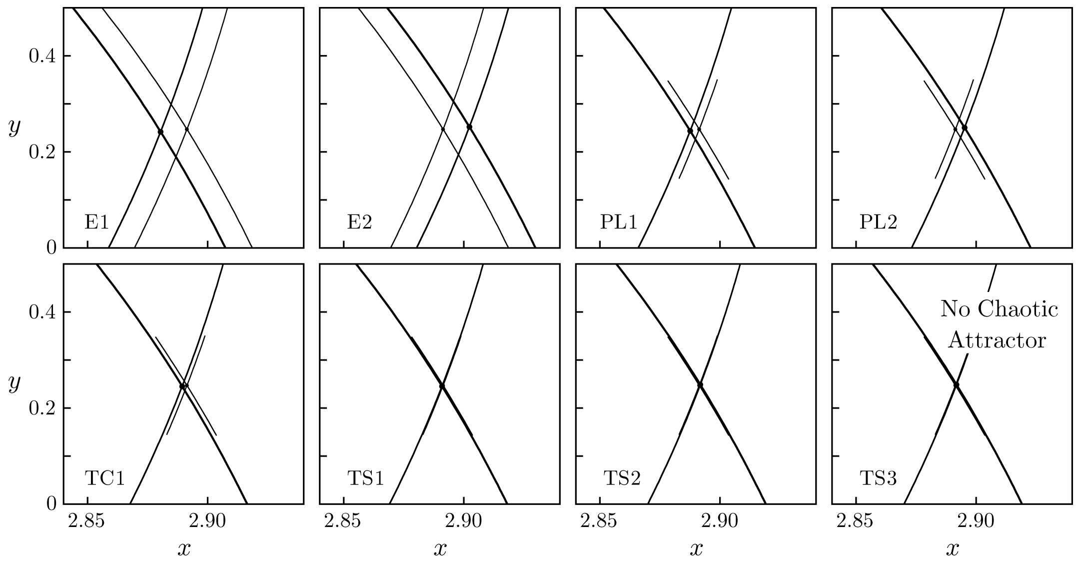

図 2　近隣系と UCA 間のずれ（鞍形点●近傍の外部構造，細線は UCA）

を選んだ根拠は，近隣系 E2 はクラス D（Dissipative systems for large displacement）でない，PL1 は導関数が不連続な，系であることに依る．図 2 は（c）の場合における外部構造の根元部を拡大し，近隣系と UCA の相違を示したものである．しかし，たとえこの部分が殆んど同じであっても，カオス・アトラクタは微分方程式（摂動を受けた力学系）の大域構造であるため，アトラクタもほぼ同じになるとは限らない．近隣系 TS3 では，鞍形点の位置は然程動かないが，アトラクタは 8 周期群となっている．

図 1 中列は近隣式 E2，右列は PL1 の結果である．これらから，図示されている以上の相違を見出すには，詳

細な拡大描画，あるいは数値的な取り扱いが必要となる．なお，図１において，対応する全てのα枝とω枝は，同じ長さで描画されている．

図１に示した近隣系の外部など構造とカオス・アトラクタの概容が殆ど同じだったことなどを基に，力学系理論の術語を用いて方程式(１)のカオス・アトラクタは構造安定性を持つとは言えないだろう．つまり，これら全てのカオス・アトラクタが定性的に同じ振る舞いを現わす（無限個の極小集合が相対的な位置関係を保って１：１に対応している）と判断できない(注6)．

なぜなら，UCAのα枝とω枝を延長したものを想定すれば，それらの交点には枝同士が（零でない角度で）交わらずに接触している接点の存在が予測されるからだ．このような点は特殊型のホモクリニック点と呼ばれている．これらの点はUCAの僅かな揺らぎによって消滅するか二個の（通常の）ホモクリニック点となる．さらに，この特殊型のホモクリニック点は二次元周期系常微分方程式によって表されるカオス・アトラクタにおいて常に存在している（数値実験では必要条件）ことを付記しておきたい．

それでは，UCAは構造安定性を持たないのだろうか．計算機を用いれば，カオス・アトラクタは常に観察されるのだが．

この疑問に対し，図１の結果はカオス・アトラクタを分解し極小集合レベルでの１対１対応を視るのは行き過ぎで，α枝の閉包，つまりカオス・アトラクタが方程式の僅かな揺らぎによって質的に変化するか否かを基に構造安定性の定義を見直すことが実在現象（不規則遷移現象）の説明に整合するであろうことを示唆している(注7)．

この「カオス・アトラクタ（α枝の閉包）が方程式の僅かな揺らぎによって質的に変化しない」安定性の概念を「実体安定性」と呼ぶことにする．

さらに，全ての近隣系（除くTS3）が顕すカオス振動波形（時系列）の観察から，それらのパワー・スペクトルはほぼ同じ分布形状を示しているものと推察されたことを付記しておきたい．

上述の事柄を総合的に踏まえれば，式(１)の系，あるいはα枝の閉包，つまりカオス・アトラクタUCAは強固な実体安定性を持つと結論付けられるだろう．

4．む　す　び

カオス現象の解説を行い，続いて不規則遷移現象と数式モデル間に整合するであろう実体安定性の概念を提唱した．理論以前であり，実験結果からの推測であること，を再度明記しておきたい．もし，この見解に磨きがかかるようであれば，読者諸賢のお力添えを期待したい(注8)．

さいごに，筆者の研究活動の継続に対し諸々のご配慮を賜る，早稲田大学 大石進一 教授，京都大学引原隆士教授，およびAberdeen大学Marian Wiercigroch教授，貴重なご助力を惜しまれない 早稲田大学 次席研究員 高安亮紀 博士のご支援に深甚なる感謝の意を表したい．

文　献

（１） Y. Ueda, The Chaos Avant-Garde : Memories of the Early Days of Chaos Theory, R. Abraham and Y. Ueda, World Scientific, Singapore, 2000.

（２） 上田睆亮，赤松則男，林　千博，“非線形常微分方程式の計算機シミュレーションと非周期動，” 信学論(A)，vol. 56-A, no. 4, pp. 218-225, April 1973.

（３） Y. Ueda, “Steady motions exhibited by Duffing's equation : A picture book of regular and chaotic motions,” New Approaches to Nonlinear Problems in Dynamics, P.J. Holmes, ed., pp. 311-322, SIAM, Pi1adelphia, 1980.

（４） Y. Ueda, The Road to Chaos, Aerial Press, Santa Cruz, 1992 ; Enlarged, 2001.

（５） 上田睆亮，カオス現象論，コロナ社，東京，2008.

（６） Y. Ueda, “Basin-filling Peano omega-branches and structural stability of a chaotic attractor,” NOLTA, vol. 5, no. 3, 2014, https://www.jstage.jst.go.jp/article/nolta/5/3/5_252/_pdf

（平成27年5月25日受付　平成27年6月30日最終受付）

上田　睆亮（うえだ　よしすけ）（正員：フェロー）

昭34京大・工・電気卒，昭39同大学院博士課程了，同年京大助手，以来非線形振動，電力機器・系統の研究に従事，現在，早大招聘研究員，アバディーン大名誉教授，哈爾賓工大名誉教授，京大名誉教授，京大工博，著書「The Road to Chaos」，「カオス現象論」など．

（注６） このパラグラフを力学系理論の術語で記せば，UCAとその近隣方程式が定める力学系が位相共役か否か，を問うものだ．しかし，数値実験によってこの問いに対して判断は下せない．数値実験結果が決定論的な振る舞いとは異質な性質を示す，つまり現象に不規則性が現れる，事実は無限個の不安定極小集合を個々に視るのでなく，それらの総体であるカオス・アトラクタそのものを安定性の対象に据えるべきことを強く示唆している．

（注７） カオス・アトラクタの質的変化には，1．幾つか（たとえば，m個）に千切れる．アトラクタがm個の点集合に分離する，つまりm-周期鞍形点のα枝の閉包に置き換わる．2．ファイゲンバウム列を逆に辿って周期群になる．3．爆縮して周期群になる（窓現象に対応）．4．アトラクタ外部の鞍形点に接触して消滅し，他のアトラクタへ跳躍移行する．等が挙げられる．1．2．3．はカオス・アトラクタが在った所で生じる現象である．それに対し，4．は跳躍現象である．

（注８） 京都大学数理解析研究所の研究集会において不規則遷移現象の見解を発表したのは筆者が，34歳，確か1970年12月17日だった．発表後，占部実 教授のコメント「君の見たことが概周期振動の本質だょ．」に対し，「違います．概周期ではありません．」と反論し譲らず，押し問答が続いた．業を煮やした先生は「若造の曲に概念的なことを言っちゃぁいかん！」と口角泡を飛ばされた．この事件はその後の筆者に，「何かにつけ発表することへの慎重さ，と覚悟」を刷り込んだ．自らの見解・信念に忠実だった占部教授には深く敬意と感謝の念を再燃させている．今回の「実体安定性」の提案は，不規則遷移現象の発表に比して筆者の確信・信念は99%であることを記しておきたい．